6. Аналитично изразяване на линейните действия с вектори

Нека $K = 0e_1e_2...e_n$ е афинна координатна система.

Теорема.1: Векторите векторите $a(a_1, a_2, ..., a_n)$, $b(b_1, b_2, ..., b_n) \in V_n$ са равни, тогава и само отгава, когато $a_k = b_k, k = 1, 2, ..., n$.
Доказателство:
Имаме $a = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$, $b = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n$. Следователно $a \equiv b \Leftrightarrow$

$$a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n$$
$$(a_1 - b_1)e_1 + (a_2 - b_2)e_2 + ... + (a_n - b_n)e_n = 0,$$

т.е. когато $a_k = b_k, k = 1, 2, ..., n$.

Теорема.2: Нека $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., k$, $u_j(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn}) \in V_n, j = 1, 2, ..., k, v(y_1, y_2, ..., y_n) \in V_n$. Тогава $v = \lambda_1u_1 + ... + \lambda_ku_k$, тогава и само тогава, когато:

$$y_i = \lambda_1x_{1i} + \lambda_2x_{2i} + ... + \lambda_kx_{ki}, i = 1, 2, ..., n.$$

Доказателство:
Имаме, че $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ji}e_i$, следователно $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_ju_j = \sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_jx_{ji})e_i$, т.е. координатите на $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_ju_j$ са $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_jx_{ji}$, $i = 1, 2, ..., n$.
От теорема.1 следва $v = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_ju_j \Leftrightarrow y_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_jx_{ji}, i = 1, 2, ..., n$.
От тази теорема и от сл.1 и сл.2 от темата за колинеарност и компланарност следтават:
Следствие.1 Векторите $u(u_1, u_2, ..., u_n), v(v_1, v_2, ..., v_n) \in V_n$ са колинеарни, тогава и само тогава, когато матрицата от координатите им има ранг по-малък или равен на едно, т.е:

$$rank \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ ... & ... \\ u_n & v_n \end{pmatrix} \leq 1,$$

Следствие.2 Векторите $u(u_1, u_2), v(v_1, v_2) \in V_2$ са колинеарни, тогава и само тогава, когато:

$$det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = 0,$$

Следствие.3 Векторите $u(u_1, u_2, u_3), v(v_1, v_2, v_3) \in V_3$ са колинеарни, тогава и само тогава, когато:

$$det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = 0,\ det\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0,\ det\begin{pmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Следствие.4 Векторите $u(u_1, u_2, u_3), v(v_1, v_2, v_3), w(w_1, w_2, w_3) \in V_3$ са компланарни, тогава и само тогава, когато матрицата от координатите им има ранг по-малък или равен на две, т.е:

$$rank\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \leq 2, \text{ или } det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Теорема.3 Ако т.$A(a_1, a_2, ..., a_n)$, т.$B(b_1, b_2, ..., b_n) \in P_n$, то $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$.

Доказателство:

По дефиниция $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, ..., b_n)$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Следователно $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$